

Тема: Розв'язування типових вправ

Мета:

- *Навчальна:* закріпити вміння розв'язувати логарифмічні нерівності різними методами (за означенням логарифма, за теоремою про розв'язок логарифмічних нерівностей, методом заміни);
- *Розвиваюча:* розвивати вміння математичною мовою висловлювати власну думку; правильно користуватись термінологією пов'язаною з вивченою темою;
- *Виховна:* виховувати наполегливість; вміння робити правильні висновки та бачити кінцеву мету;

Компетенції:

- *Математична компетентність:*
 - *Уміння:* оперувати числовою інформацією; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач;
 - *Ставлення:* усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного і оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін;
 - *Навчальні ресурси:* розв'язування математичних задач;

Тип уроку: удосконалення умінь і навичок;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

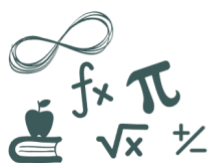
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Які нерівності називають логарифмічними?
- Які нерівності називаються найпростішими логарифмічними нерівностями?
- Як розв'язати найпростішу логарифмічну нерівність? Наведіть приклад.
- Як розв'язати нерівність типу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність типу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $0 < a < 1$?



III. Розв'язування задач

№1

Розв'яжіть нерівність

1) $\log_{\frac{3}{7}}(x + 5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$

2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$

3) $\log_{\frac{2}{9}}(x - 4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$

Розв'язок:

1) $\log_{\frac{3}{7}}(x + 5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$

$$\begin{cases} x + 5 > 8 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -5 \end{cases} \Rightarrow x > -5$$

Відповідь: $x \in (-5; +\infty)$

2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$

$$x > 12$$

Відповідь: $x \in (12; +\infty)$

3) $\log_{\frac{2}{9}}(x - 4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$

$$\begin{cases} x - 4 < 12 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 16 \\ x > 4 \end{cases}$$

Відповідь: $x \in (4; 16)$

№2

Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(5x + 1) > 4$

2) $\log_5 x \leq -1$

3) $\log_3(2x - 1) \leq 3$

Розв'язок:

1) $\log_2(5x + 1) > 4$

$$\log_2(5x + 1) > \log_2 16$$

$$\begin{cases} 5x + 1 > 16 \\ 5x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x > 15 \\ 5x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow x > 3$$

Відповідь: $x \in (3; +\infty)$

2) $\log_5 x \leq -1$

$$\log_5 x \leq \log_5 \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{5} \\ x > 0 \end{cases}$$



Відповідь: $x \in \left(0; \frac{1}{5}\right]$

3) $\log_3(2x - 1) \leq 3$

$$\log_3(2x - 1) \leq \log_3 27$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \leq 27 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \leq 28 \\ 2x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 14 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \left(\frac{1}{2}; 14\right]$

№3

Скільки цілих розв'язків має нерівність:

$$\log_3(7 - x) < 3$$

Розв'язок:

$$\log_3(7 - x) < 3$$

$$\log_3(7 - x) < \log_3 27$$

$$\begin{cases} 7 - x < 27 \\ 7 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -20 \\ x < 7 \end{cases}$$

Відповідь: нерівність має 26 цілих розв'язків

№4

Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_5 2x < \log_5(x + 1)$

2) $\log_{0,4}(x^2 - 3) < \log_{0,4}(x + 3)$

Розв'язок:

1) $\log_5 2x < \log_5(x + 1)$

$$\begin{cases} 2x < x + 1 \\ 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Відповідь: $(0; 1)$

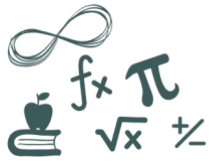
2) $\log_{0,4}(x^2 - 3) < \log_{0,4}(x + 3)$

$$\begin{cases} x^2 - 3 > x + 3 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x > -3 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 6 > 0$$

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$



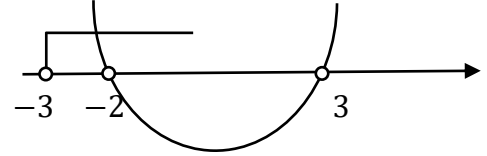
2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - x - 6 = 0$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Так як знак нерівності «>», оберемо проміжок $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$

$$\begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \\ x > -3 \end{cases}$$

Відповідь: $(-3; 2) \cup (3; +\infty)$



№5

Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_{0,7}(x^2 + 10x + 25) > 0$

2) $\log_2(x^2 - 3x) \leq 2$

Розв'язок:

1) $\log_{0,7}(x^2 + 10x + 25) > 0$

$$\log_{0,7}(x^2 + 10x + 25) > \log_{0,7} 1$$

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 25 < 1 \\ x^2 + 10x + 25 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 10x + 24 < 0 \\ (x + 5)^2 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 10x + 24 < 0$$

$$f(x) = x^2 + 10x + 24$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

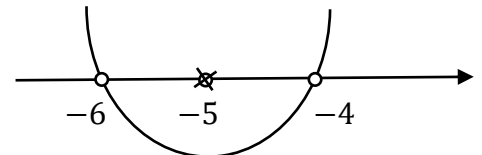
2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 + 10x + 24 = 0$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -6 \end{cases}$

Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок $(-6; -4)$

$$\begin{cases} x > -6 \\ x < -4 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

Відповідь: $(-6; -5) \cup (-5; -4)$



2) $\log_2(x^2 - 3x) \leq 2$

$$\log_2(x^2 - 3x) \leq \log_2 4$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x \leq 4 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x(x - 3) > 0 \end{cases}$$



$$x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$f(x) = x^2 - 3x - 4$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - 3x - 4 = 0$

$$\text{За теоремою Вієта} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Так як знак нерівності « \leq », оберемо проміжок $[-1; 4]$

$$x(x - 3) > 0$$

$$f(x) = x(x - 3)$$

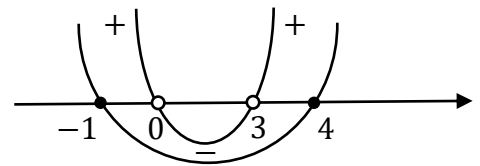
1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $x(x - 3) = 0$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

Так як знак нерівності « $>$ », оберемо проміжок
 $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$



Відповідь: $[-1; 0) \cup (3; 4]$

№6

Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) + \log_{\frac{1}{3}} x < -1$

2) $\log_{0,1}(x - 5) + \log_{0,1}(x - 2) \geq -1$

3) $\log_3(1 - x) + \log_3(-5x - 2) \geq 2 \log_3 2 + 1$

Розв'язок:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) + \log_{\frac{1}{3}} x < -1$

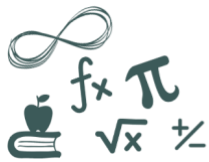
$$\log_{\frac{1}{3}}(x(x + 2)) < \log_{\frac{1}{3}} 3$$

$$\begin{cases} x(x + 2) > 3 \\ x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \\ x > 0 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$



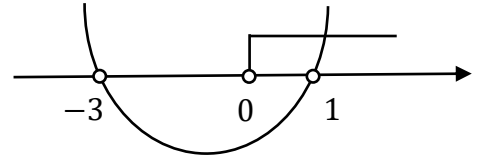
2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 + 2x - 3 = 0$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Так як знак нерівності «>», оберемо проміжок $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Відповідь: $(1; +\infty)$



2) $\log_{0,1}(x - 5) + \log_{0,1}(x - 2) \geq -1$

$$\log_{0,1}((x - 5)(x - 2)) \geq \log_{0,1} 10$$

$$\begin{cases} (x - 5)(x - 2) \leq 10 \\ x - 5 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 5x + 10 \leq 10 \\ x > 5 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x \leq 0 \\ x > 5 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x - 7) \leq 0 \\ x > 5 \end{cases}$$

$$x(x - 7) \leq 0$$

$$f(x) = x(x - 7)$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $x(x - 7) = 0$

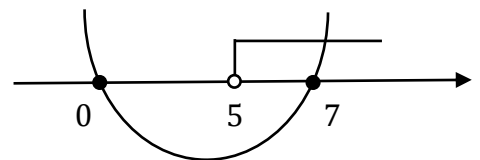
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 7$$

Так як знак нерівності «≤», оберемо проміжок $[0; 7]$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 7 \\ x > 5 \end{cases}$$

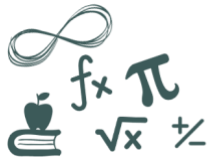
Відповіді: $(5; 7]$



3) $\log_3(1 - x) + \log_3(-5x - 2) \geq 2\log_3 2 + 1$

$$\log_3((1 - x)(-5x - 2)) \geq \log_3 4 + \log_3 3$$

$$\log_3((1 - x)(-5x - 2)) \geq \log_3(4 \cdot 3)$$



$$\begin{cases} (1-x)(-5x-2) \geq 12 \\ 1-x > 0 \\ -5x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x-2+5x^2+2x-12 \geq 0 \\ x < 1 \\ -5x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2-3x-14 \geq 0 \\ x < 1 \\ x < -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow x < -0,4$$

$$5x^2 - 3x - 14 \geq 0$$

$$f(x) = 5x^2 - 3x - 14$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

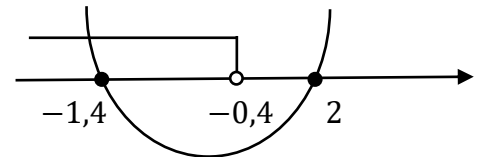
2. Нулі функції $f(x)$: $5x^2 - 3x - 14 = 0$

$$D = 9 + 280 = 289 = 17^2$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 17}{10} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{7}{5} = -1,4 \end{cases}$$

Так як знак нерівності « \geq », оберемо проміжок $(-\infty; 1,4] \cup [2; +\infty)$

$$\begin{cases} x < -1,4 \\ x > 2 \\ x > -0,4 \end{cases}$$



Відповідь: $(-\infty; -0,4]$

№7

Розв'яжіть нерівність:

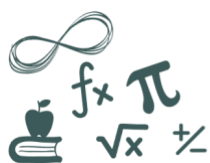
1) $\log_{0,2}^2 x \leq 1$

2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x \geq 4$

3) $\lg^2 x + 3\lg x - 4 < 0$

4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x + 2\log_{\frac{1}{4}} x - 8 \leq 0$

5) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \geq 0$



Розв'язок:

1) $\log_{0,2}^2 x \leq 1$

$$-1 \leq \log_{0,2} x \leq 1$$

$$\log_{0,2} 5 \leq \log_{0,2} x \leq \log_{0,2} \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} 5 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ x > 0 \end{cases}$$

Відповідь: $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$

2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x \geq 4$

$$2 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq -2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 9$$

$$\begin{cases} \frac{1}{9} \geq x \geq 9 \\ x > 0 \end{cases}$$

Відповідь: $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [9; +\infty)$

3) $\lg^2 x + 3\lg x - 4 < 0$

Нехай $\lg x = t$:

$$t^2 + 3t - 4 < 0$$

$$f(x) = t^2 + 3t - 4$$

*Так як нам необхідна множина яка в «квадраті» буде приймати значення « ≤ 1 », то отримаємо множину всіх додатніх чисел « ≤ 1 », всі від'ємні числа « ≤ -1 » і число «0». Таку множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності:

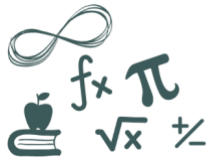
$$-1 \leq \log_{0,2} x \leq 1$$

Так як $-1 = \log_{0,2} 5$ і $1 = \log_{0,2} \frac{1}{5}$

*Так як нам необхідна множина яка в «квадраті» буде приймати значення « ≥ 4 », то отримаємо множину всіх додатніх чисел « ≤ 2 », всі від'ємні числа « ≤ -2 » і число «0». Таку множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності:

$$2 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq -2$$

Так як $2 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$ і $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$



1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$
2. Нулі функції $f(x): t^2 + 3t - 4 = 0$
За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 = -4 \\ t_2 = 1 \end{cases}$

Так як знак нерівності « $<$ », оберемо проміжок $(-4; 1)$

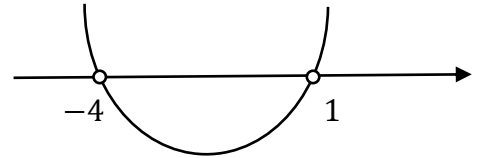
$$\begin{cases} t > -4 \\ t < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x > -4 \\ \lg x < 1 \end{cases}$$

$$-4 < \lg x < 1$$

$$\lg \frac{1}{10000} < \lg x < \lg 10$$

$$\frac{1}{10000} < x < 10$$

Відповідь: $\left(\frac{1}{10000}; 10\right)$



4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x + 2 \log_{\frac{1}{4}} x - 8 \leq 0$

Нехай $\log_{\frac{1}{4}} x = t$:

$$t^2 + 2t - 8 \leq 0$$

$$f(x) = t^2 + 2t - 8$$

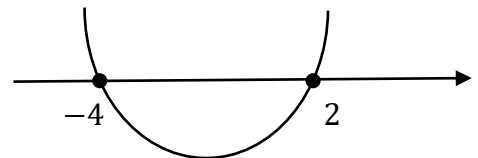
1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$
2. Нулі функції $f(x): t^2 + 2t - 8 = 0$
За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -4 \end{cases}$

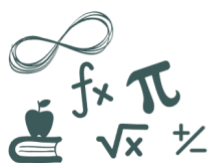
Так як знак нерівності « \leq », оберемо проміжок $[-4; 2]$

$$\begin{cases} t \geq -4 \\ t \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} x \geq -4 \\ \log_{\frac{1}{4}} x \leq 2 \end{cases}$$

$$-4 \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq 2$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 256 \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$$





$$256 \geq x \geq \frac{1}{16}$$

Відповідь: $\left[\frac{1}{16}; 256\right]$

5) $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 \geq 0$

Нехай $\log_2 x = t$:

$$t^2 - 5t + 6 \geq 0$$

$$f(t) = t^2 - 5t + 6$$

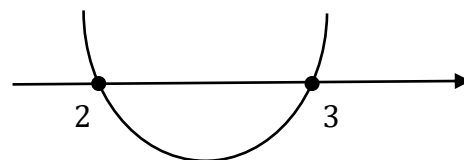
1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(t)$: $t^2 - 5t + 6 = 0$

$$\text{За теоремою Вієта} \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

Так як знак нерівності « \geq », оберемо проміжок $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$

$$\begin{cases} t \leq 2 \\ t \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq 2 \\ \log_2 x \geq 3 \end{cases}$$



$$3 \leq \log_2 x \leq 2$$

$$\log_2 8 \leq \log_2 x \leq \log_2 4$$

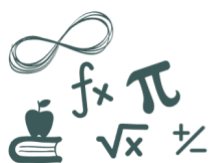
$$8 \leq x \leq 4$$

$$\begin{cases} x \geq 8 \\ x \leq 4 \\ x > 0 \end{cases}$$

Відповідь: $(0; 4] \cup [8; +\infty)$

IV. Підсумок уроку

- Які нерівності називають логарифмічними?
- Які нерівності називаються найпростішими логарифмічними нерівностями?
- Як розв'язати найпростішу логарифмічну нерівність? Наведіть приклад.
- Як розв'язати нерівність типу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність типу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $0 < a < 1$?



V. Домашнє завдання

Повторити §1 (ст.36-37)

Виконати № 7.2 (3,2); 7.4 (2,3); 7.6 (2); 7.8 (2);
7.10 (3,4); 7.12 (2,4); 7.14 (1-3)

Мерзляк А.Г.

Повторити §7

Виконати № 7.4 (1-2); 7.8; 7.12; 7.16; 7.20; 7.26

Істер О.С.

Повторити §5 (п.5.2)

Виконати № 5.2.2 (1,3); 5.2.4 (1,4)

Нелін Є.П.

Повторити §4

Виконати № 166 (а,в); 180 (б,г)

Бевз Г.П.